Correction Devoir maison n°3

Exercice 1 - Probabilités et suites

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.
On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :
— on lance la pièce
— si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1, sinon on tire une boule de U_2
— si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.
Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

A_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_1 **à l'issue** de la $n^{ième}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

et par B_n l'évènement

B_n : " la boule blanche se trouve dans l'urne U_2 **à l'issue** de la $n^{ième}$ répétition de l'épreuve $\mathcal{E}$ "

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) La notation PiB_1 signifiant : “la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1" (on l'a donc remise dans U_2). On calcule ç l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(PiB_1) &= P(Pi) \times P_{Pi}(B_1)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

   (b) Les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$ sont

$$\boxed{\{PiB_1, PiA_1, FaA_1, FaB_1\}}$$

   Remarque : La boule blanche ne se trouvant que dans l'urne U_1 au début, l'évènement FaB_1 est impossible.

   (c) En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènement (Pi,Fa), on a

$$\begin{aligned}P(A_1) &= P(PiA_1) + P(FaA_1)\\ &= P(Pi)P_{Pi}(A_1) + P(Fa)P_{Fa}(A_1)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\\ &\boxed{= \frac{5}{6}}\end{aligned}$$

   On a alors

$$\boxed{P(B_1) = 1 - P(A_1) = \frac{1}{6}}$$

2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.

   (a) Si l'on sait que la boule blanche est dans l'urne U_1, on se trouve dans la même situation qu'au premier tirage. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{5}{6} \text{ et } P_{A_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{6}.}$$

   (b) On se place dans le cas où la boule blanche est dans l'urne U_2 à la $n^{\text{ème}}$ expérience. En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènement (Pi,Fa), on a

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= P_{B_n}(Pi \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(Fa \cap A_{n+1}) \\ &= P_{B_n}(Pi) \times P_{B_n \cap Pi}(A_{n+1}) + P_{B_n}(Fa) \times P_{B_n \cap Fa}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &\boxed{= \frac{1}{6}} \end{aligned}$$

   On a alors

$$\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}}$$

   (c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. Les évènements (A_n, B_n) forment un système complet d'évènements. En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{5}{6} + b_n \times \frac{1}{6} \\ a_{n+1} &= \boxed{\frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n} \end{aligned}$$

   De la même façon,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{5}{6} \\ b_{n+1} &= \boxed{\frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n} \end{aligned}$$

   (d) (A_n, B_n) forme un système complet d'évènement, donc

$$\boxed{P(A_n) + P(B_n) = a_n + b_n = 1}$$

   Soit $n \geq 0$, on a d'une part

$$a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n,$$

   d'autre part

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n \quad \Longleftrightarrow \quad b_n = \frac{6}{5}b_{n+1} - \frac{1}{5}a_n$$

donc

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{5}b_{n+1} - \frac{1}{5}a_n\right) \\
\iff \quad & a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{5}b_{n+1} - \frac{1}{30}a_n \\
\iff \quad & a_{n+1} = \frac{24}{30}a_n + \frac{1}{5}(1 - a_{n+1}) \\
\iff \quad & a_{n+1} + \frac{1}{5}a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5} \\
\iff \quad & \frac{6}{5}a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5} \\
\iff \quad & a_{n+1} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}a_n + \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} \\
\iff \quad & a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

On a également,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= 1 - a_{n+1} \\
&= 1 - \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{2}{3}(1 - b_n) \\
&= \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}b_n \\
&= \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad \left\{ \begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} &= \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{aligned} \right.}$$

(e) On a deux suites arithmético-géométrique ayant pour termes initiaux $a_1 = \frac{5}{6}$ et $b_1 = \frac{1}{6}$. On résout l'équation

$$\begin{aligned}
x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \iff \quad & \frac{1}{3}x = \frac{1}{6} \\
\iff \quad & x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On pose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = a_n - \frac{1}{2}$. On vérifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}u_n \end{aligned}$$

De plus $u_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. On a alors $u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et finalement

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.}$$

Enfin, $b_n = 1 - a_n$ donc

$$\boxed{b_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}.}$$

Exercice 2 - Matrices et suites

Soit a, b, c, d des réels et soit E l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 qui vérifient les 2 conditions : $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$.

1. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. M vérifie $ad - bc = 0$. Son déterminant est donc nul, M n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{Aucune matrice de } E \text{ n'est inversible.}}$$

(b) Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $1 \times (-1) - (-1) \times 1 = 0$ et $1 + (-1) = 0$. Donc,

$$\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ appartient à } E.}$$

Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $1 \times (-1) - (-1) \times 1 = 0$ et $1 + (-1) = 0$. Donc,

$$\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ appartient à } E.}$$

(c) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$$

Or la matrice $2I_2$ est inversible et n'appartient donc pas à E.

$$\boxed{\text{Donc la somme de 2 matrices de } E \text{ n'est pas forcément une matrice de } E.}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Or pour cette matrice $2 + 2 = 4 \neq 0$ donc la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à E.

$$\boxed{\text{Donc le produit de 2 matrices de } E \text{ n'est pas forcément une matrice de } E.}$$

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de E. On calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Or
— $a = -d$ donc $a^2 + bc = -ad + bc = 0$,
— $ab + bd = b(a + d) = 0$
— $ac + cd = c(a + d) = 0$
— $bc + d^2 = bc - ad = 0$
Finalement

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}$$

Donc pour tout $n \geq 2$, $M^n = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

Dans la suite de l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *et on note* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité.*

2. (a) On a $1 \times 5 - (-2) \times 2 = 9 \neq 0$. Donc A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) On a

$$K = A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $-2 + 2 = 0$ et $-2 \times 2 - (-2) \times 2 = 0$. K appartient bien à E.

(c) Comme $K \in E$, d'après la question 1.d, $K^2 = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} K^2 = 0 &\iff (A - 3I)^2 = 0 \\ &\iff A^2 - 3I \times A - 3A \times I + 9I = 0 \\ &\iff A^2 - 6A + 9I = 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\alpha = -6 \text{ et } \beta = 9}$$

(d) En utilisant l'égalité précédente on a

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 9I = 0 &\iff A^2 - 6A = -9I \\ &\iff A(A - 6I) = -9I \\ &\iff A \times (-\frac{1}{9}(A - 6I)) = I \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\boxed{A \text{ était inversible et que } A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A}$$

(e) — On montre par récurrence $\mathscr{P}_n : \{A^n = a_nA + b_nI\}$.
— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit "$A^0 = a_0A + b_0I$. $\mathscr{P}_0$ est vraie en choisissant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a

$$\begin{aligned} A^n = a_nA + b_nI &\iff A^n \times A = a_nA^2 + b_nA \\ &\iff A^{n+1} = a_n(6A - 9I) + b_nA \\ &\iff A^{n+1} = (6a_n + b_n)A - 9a_nI \end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie en posant $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -9a_n$. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = a_nA + b_nI}$

(f) La récurrence donne des relations pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 6a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & -9a_n \end{array}\right.$$

De plus, on a $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + b_{n+1} \iff a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout alors

$$x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0$$

L'équation de degré 2 a donc une unique solution. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que

$$a_n = (\mu + \lambda n)3^n$$

De plus en utilisant, $a_0 = 0$ et $a_1 = 6a_0 + b_0 = 1$, on écrit le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 0 \\ 3(\mu + \lambda) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 0 \\ \lambda & = & \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi

$$\boxed{a_n = n3^{n-1}.}$$

En utilisant $b_n = -9a_{n-1}$, on obtient

$$\boxed{b_n = -(n-1)3^n.}$$

On a enfin

$$\boxed{A^n = n3^{n-1}A - n3^nI = \begin{pmatrix} n3^{n-1} - (n-1)3^n & 2n3^{n-1} \\ -2n3^{n-1} & 5n3^{n-1} - (n-1)3^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 - Matrices et probabilités

1. Au jour 0, on est certain de commencer par la natation. ainsi,

$$\boxed{a_0 = 1, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = 0.}$$

Comme l'athlète a pratiqué la natation au jour 0, il pratiquera au jour 1 la natation avec probabilité $\frac{1}{5}$, le cyclisme avec probabilité $\frac{1}{5}$ et la course a pied avec probabilité $\frac{3}{5}$. Ainsi

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{5}, \qquad b_1 = \frac{1}{5}, \qquad c_1 = \frac{3}{5}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) sur lequel on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} P(A_{n+1}) & = & P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ & = & P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ & = & a_n \times \dfrac{1}{5} + b_n \times \dfrac{2}{5} + c_n \times 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a alors } a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n}$$

De même

$$\begin{array}{rcl} P(B_{n+1}) & = & P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\ & = & P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ & = & a_n \times \dfrac{1}{5} + b_n \times \dfrac{3}{5} + c_n \times \dfrac{1}{5} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a aussi } b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n.}$$

Enfin

$$\begin{array}{rcl} P(C_{n+1}) & = & P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\ & = & P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\ & = & a_n \times \dfrac{3}{5} + b_n \times 0 + c_n \times \dfrac{4}{5} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a aussi } c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.}$$

3. On remarque que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a donc } A = \frac{1}{5}M.}$$

4. On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5^n}M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

— **Initialisation :** La propriété $\mathscr{P}_0$ s'écrit $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Or, $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$. La propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n.

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{5}M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ & = & \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5^n}M \times M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \dfrac{1}{5^{n+1}}M^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

5. On en déduit alors

$$\boxed{a_n = \frac{1}{6 \times 5^n}(5^n + 9 - 4 \times 2^n).}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{6 \times 5^n}(2 \times 5^n - 2 \times 2^n).}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{6 \times 5^n}(3 \times 5^n - 9 + 6 \times 2^n).}$$